აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ხელნაწერის უფლებით

კახა ჩუბინიძე

საკოორდინატო ღერძების მობრუნება და ინტეგრალთა დიფერენცირება ძვრის მიმართ ინვარიანტული ბაზისების მიხედვით

მათემატიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის
მოსაპოვებლად წარმოდგენილი დისერტაციის
ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

ქუთაისი
2016

სადისერტაციო ნაშრომი შესრულებულია აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტში.

სამეცნიერო
ხელმძღვანელი: **გიორგი ონიანი**
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის
პროფესორი

რეცენზენტები: 1. **ვალენტინ სკვორცოვი**
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
მ. ლომონოსოვის სახელობის მოსკოვის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის პროფესორი

2. **დუგლას უგულავა**
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის
პროფესორი

დისერტაციის დაცვა შედგება აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს მიერ შექმნილ სადისერტაციო კომისიის სხდომაზე 2016 წლის 27 თებერვალს 13 საათზე.

მისამართი: 4600, ქუთაისი, თამარ მეფის ქუჩა N59, პირველი კორპუსი, აუდიტორია N1114.

დისერტაციის გაცნობა შესაძლებელია აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სამეცნიერო ბიბლიოთეკაში (4600, ქუთაისი, თამარ მეფის ქ. N59).

ავტორეფერატი დაიგზავნა 01.02.2016.

სადისერტაციო საბჭოს
მდივანი ზ. სოხაძე

თემის აქტუალობა. ფუნქციის ანალიზურ თვისებებზე ცვლადის გარდაქმნის ზეგავლენის შესწავლა ჰარმონიული ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი ამოცანაა. ამ მიმართულებით კვლევის საგანი იყო შემდეგი ორი ძირითადი საკითხი: 1) შესაძლებელია თუ არა ფუნქციის ამათუიმ ანალიზური თვისების მიღწევა მოცემული ტიპის ცვლადის გარდაქმნის მეშვეობით? 2) როგორი ცვლადის გარდაქმნების მიმართ ინარჩუნებს ფუნქცია ამათუიმ ანალიზურ თვისებას?

აღნიშნულ ამოცანებთან დაკავშირებით, იმ შემთხვევაში, როცა ფუნქციის ანალიზური თვისების როლში აიღება ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის თანაბარი ან აბსოლუტური კრებადობა, ხოლო ცვლადის გარდაქმნებად განიხილება ტორის ჰომეომორფიზმები, მიღებულია ჰ. ბორის, ა. ბერლინგისა და ჰ. ჰელსონის, ა. ოლევსკის, ჟ.-პ. კაჰანისა და ი. კაცნელსონის, ა. სააკიანის, უ. ჯურკასა და დ. უოტერმანის, ა. ბაერშტაინისა და დ. უოტერმანის მნიშვნელოვანი შედეგები. ფუნქციის დიფერენციალური თვისებების მიღწევადობა და შენარჩუნება ჰომეომორფიზმის მოქმედებისას შეისწავლებოდა ე. ბრუკნერისა და კ. ჰოფმანის, მ. ლაშკოვიჩისა და დ. პრაისის შრომებში. ზემოაღნიშნული შედეგები გადმოცემულია ა.ოლევსკის [11] მიმოხილვით ნაშრომში და კ. ჰოფმანის, ტ. ნიშიურასა და დ. უოტერმანის [4] მონოგრაფიაში.

მრავალი ცვლადის ჯამებადი ფუნქციის თვისებებზე საკოორდინატო ღერძების შერჩევის (ანუ ცვლადის იმ გარდაქმნის, რომელიც მდგომარეობს მობრუნებაში) ზეგავლენის კვლევა ინიცირებული იყო ა. ზიგმუნდის მიერ, კერძოდ, მის მიერ დასმული პრობლემით მობრუნების მეშვეობით ძლიერად დიფერენცირებადობის მიღწევადობის შესახებ. მობრუნების შემთხვევაში ძლიერი ინტეგრალური საშუალოების კრებადობის, ფურიეს ჯერადი მწკრივისა და ინტეგრალის პრინსჰაიმის აზრით კრებადობისა და სხვადასხვა აზრით სასრული ვარიაციის კლასისადმი მიკუთვნების თვისებების მიღწევადობისა და შენარჩუნების ამოცანები შეისწავლებოდა ჯ. მარსტრანდის, ბ. ლოპეს-მელეროს, ა. სტოკოლოსის, გ.გ. ონიანის, გ. ლეფსვერიძის, გ. კარაგულიანის, მ. დიაჩენკოსა და ო. დრაგოშანსკის შრომებში.

დისერტაციის მიზანი. მობრუნების (ე.ი. საკოორდინატო ღერძების შერჩევის) მეშვეობით ინტეგრალის დიფერენცირებადობის მიღწევადობის შესახებ ზიგმუნდის ამოცანის შესწავლა ბაზისთა ზოგადი კლასებისათვის; მობრუნებისას ინტეგრალის დიფერენცირებადობის თვისების შენარჩუნების საკითხის გამოკვლევა მრავალ-განზომილებიანი ინტერვალებისაგან შედგენილი ძვრის მიმართ ინვარიანტული ბაზისებისათვის; იმ განსაკუთრებულობების შესწავლა, რომელიც შეიძლება ჰქონდეს ფიქსირებულ ფუნქციას საკოორდინატო ღერძების სხვადახვა შერჩევისას, მოცემული ბაზისის მიმართ ინტეგრალის დიფერენცირებადობის თვალსაზრისით; ლებეგ-სტილტიესის სინგულარული ზომების დიფერენციალური თვისებების შესწავლა.

მეცნიერული სიახლე.

1) ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბუზემან-ფელერის ბაზისების კლასისათვის მოცემულია ა. ზიგმუნდის ამოცანის გადაწყვეტა, კერძოდ, დადგენილია, რომ თუ აღნიშნული ტიპის ბაზისი არასტანდარტულია იმ გაგებით, რომ არ ადიფერენცირებს რაიმე ჯამებადი ფუნქციის ინტეგრალს, მაშინ მოიძებნება ფუნქცია, რომლის ინტეგრალის დიფერენცირებადობა მიუღწეველია მობრუნებების მეშვეობით;
2) მრავალგანზომილებიანი ინტერვალებისაგან შედგენილი ძვრის მიმართ ინვარიანტული ნებისმიერი არასტანდარტული ბაზისისათვის დადგენილია, რომ მობრუნებისას ინტეგრალის დიფერენცირებადობის თვისება საზოგადოდ არ ნარჩუნდება;
3) შემოღებულია სინგულარულ მობრუნებათა სიმრავლეები. ეს სიმრავლეები ასახავენ იმ განსაკუთრებულობებს, რომლებიც შეიძლება ჰქონდეს ფიქსირებულ ფუნქციას საკოორდინატო ღერძების სხვადახვა შერჩევისას, მოცემული ბაზისის მიმართ ინტეგრალის დიფერენცირებადობის თვალსაზრისით. დადგენილია სინგულარულ მობრუნებათა სიმრავლეების ტოპოლოგიური სტრუქტურა.

4) ორგანზომილებიანი ინტერვალებისაგან შედგენილი ძვრის მიმართ ინვარიანტული ნებისმიერი არასტანდარტული სიმეტრიული ბაზისისათვის დახასიათებულია არაუმეტეს თვლადი სინგულარულ მობრუნებათა სიმრავლეები;
5) ორგანზომილებიანი ინტერვალებისაგან შედგენილი ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული და ბუზემან-ფელერის ნებისმიერი არასტანდარტული სიმეტრიული ბაზისისათვის მოცემულია სინგულარულ მობრუნებათა სიმრავლეების სრული დახასიათება;
6) დადგენილია, რომ სინგულარულ ლებეგ-სტილტიესის ზომებს არა აქვთ საშუალოების თითქმის ყველგან ნულისაკენ კრებადობის თვისება არც ერთი ძვრის მიმართ ინვარიანტული არასტანდარტული ბაზისისათვის.

ნაშრომის აპრობაცია. დისერტაციის შედეგები მოხსენებული იქნა აკაკი წერეთლის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სამეცნიერო სემინარზე (ხელმძღვანელი - პროფ. გ.გ. ონიანი), საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის V საერთაშორისო კონფერენციაზე (ბათუმი, 2014, 8-12 სექტემბერი), საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის VI საერთაშორისო კონფერენციაზე (ბათუმი, 2015, 12-16 ივლისი), ქართულ-შვედურ კონფერენციაზე - "ანალიზი და დინამიკური სიტემები" (თბილისი, 2015, 15-22 ივლისი), აკადემიკოს ს.მ. ნიკოლსკის 110 წლისთავისადმი მიძღვნილ საერთაშორისო კონფერენციაზე - "ფუნქციური სივრცეები და ფუნქციათა მიახლოების თეორია " (მოსკოვი, რუსეთი, 2015, 25-29 მაისი) და პროფ. ვ.ა. სკვორცოვის 80 წლის იუბილესადმი მიძღვნილ საერთაშორისო კონფერენციაზე - "ჰარმონიული ანალიზი და ინტეგრალის თეორია " (მოსკოვი, რუსეთი, 2015, 23-24 სექტემბერი).

პუბლიკაცია. დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებულია ექვსი ნაშრომი, რომელთა ჩამონათვალი მოცემულია ავტორეფერატის ბოლოს.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა. დისერტაციის მოცულობა 80 გვერდია. დისერტაცია შედგება შესავლის, ექვსი პარაგრაფისა და გამოყენებული ლიტერატურის ჩამონათვალისაგან. ბიბლიოგრაფია წარმოდგენილია 32 დასახელებით.

დისერტაციის შინაარსი

შემოვიღოთ ზოგიერთი განსაზღვრება და გავიხსენოთ ზოგიერთი შედეგი ინტეგრალთა დიფერენცირების თეორიიდან.

$\mathbb{R}^n$ სივრცეზე განსაზღვრულ B ასახვას ეწოდება დიფერენცირების ბაზისი, თუ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$-სთვის $B(x)$ არის x-ის შემცველი შემოსაზღვრული, ზომადი და დადებითი ზომის მქონე სიმრავლეთა ოჯახი ისეთი, რომ მოიძებნება $R_k \in B(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ მიმდევრობა თვისებით: $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} R_k = 0$.

$f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისთვის

$$\overline{D}_B\left(\textstyle\int f, x\right) = \varlimsup_{\substack{R\in B(x)\\ \operatorname{diam} R\to 0}} \frac{1}{|R|}\int_R f \quad \text{და} \quad \underline{D}_B\left(\textstyle\int f, x\right) = \varliminf_{\substack{R\in B(x)\\ \operatorname{diam} R\to 0}} \frac{1}{|R|}\int_R f$$

რიცხვებს ეწოდებათ f ფუნქციის ინტეგრალის ზედა და ქვედა წარმოებული x წერტილში. თუ ზედა და ქვედა წარმოებულები ერთმანეთის ტოლია, მაშინ მათ საერთო მნიშვნელობას ეწოდება f-ის ინტეგრალის წარმოებული x წერტილში და აღინიშნება $D_B(\int f, x)$-ით. ვიტყვით, რომ B ბაზისი ადიფერენცირებს $\int f$-ს, თუ $\overline{D}_B(\int f, x) = \underline{D}_B(\int f, x) = f(x)$ თ.ყ. $x \in \mathbb{R}^n$-სთვის. თუ ეს უკანასკნელი სიმართლეა X კლასის ყოველი f ფუნქციისთვის, მაშინ ვიტყვით, რომ B ადიფერენცირებს X კლასს.

განვსაზღვროთ $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}(\mathbb{R}^n), \mathrm{I} = \mathrm{I}(\mathbb{R}^n)$ და $\mathrm{P} = \mathrm{P}(\mathbb{R}^n)$ ბაზისები, რომელთათვისაც:

- $\mathrm{Q}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა n-განზომილებიანი ღია კუბური ინტერვალისაგან;
- $\mathrm{I}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა n-განზომილებიანი ღია ინტერვალისაგან;
- $\mathrm{P}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა n-განზომილებიანი ღია მართკუთხედისაგან.

შევნიშნოთ, რომ Q და I ბაზისების მიმართ დიფერენცირებას, შესაბამისად, ეწოდება ჩვეულებრივი და ძლიერი დიფერენცირება.

Q, I და P ბაზისების შესახებ ცნობილია შემდეგი ფუნდამენტური შედეგები (იხ. [5]):

კუბების ბაზისი Q ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს (ა. ლებეგი, 1910);

ინტერვალების ბაზისი I ადიფერენცირებს $L(1+\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ კლასს (ბ. იესენი, ი. მარცინკევიჩი, ა. ზიგმუნდი, 1935);

ინტერვალების ბაზისი I არ ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს, უფრო მეტიც, I არ ადიფერენცირებს $L(1+\ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$-ზე უფრო ფართო არც ერთ ინტეგრალურ კლასს (ს. საქსი, 1935);

მართკუთხედების ბაზისი P არ ადიფერენცირებს $L^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L(\mathbb{R}^n)$ კლასსაც კი (ა. ზიგმუნდი, 1927).

B ბაზისისთვის $\overline{B}$-ით აღვნიშნოთ $B(x)$ $(x\in\mathbb{R}^n)$ ოჯახების გაერთიანება.

B ბაზისს ეწოდება:

ძვრის მიმართ ინვარიანტული (მოკლედ, TI-ბაზისი), თუ $B(x)=\{x+R : R\in B(0)\}$ ყოველი $x\in\mathbb{R}^n$-სთვის;

ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული (მოკლედ, HI-ბაზისი), თუ ყოველი $x\in\mathbb{R}^n$, $R\in B(x)$ და H ჰომოთეტიისათვის ცენტრით x-ში გვაქვს: $H(R)\in B(x)$;

შედგენილი Δ კლასის სიმრავლეებისგან, თუ $\overline{B}\subset\Delta$;

ამოზნექილი, თუ ის შედგენილია ამოზნექილი სიმრავლეებისაგან;

ბუზემან-ფელერის, თუ ის შედგენილია ღია სიმრავლეებისაგან და სრულდება შემდეგი პირობა: $(x\in\mathbb{R}^n,\ R\in B(x),\ y\in R)\Rightarrow R\in B(y)$.

შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$\mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ - ყველა ძვრის მიმართ ინვარიანტული ბაზისის კლასი;

$\mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$ - ყველა ჰომოთეტიის მიმართ ინვარიანტული ბაზისის კლასი;

$\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}}$ - ყველა ბუზემან-ფელერის ბაზისის კლასი;

$\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ - კლასი ყველა იმ ბაზისისა, რომელიც არ ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$-ს.

შევნიშნოთ, რომ თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$, მაშინ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ (იხ., მაგ., [12, Ch. I, §3]).

B ბაზისს ეწოდება B' ბაზისის ქვებაზისი (აღნიშვნა: $B \subset B'$), თუ $B(x) \subset B'(x)$ ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$-სთვის. B ბაზისისთვის $\mathfrak{B}_B$-თი აღვნიშნოთ B-ს ყველა ქვებაზისის კლასი.

B ბაზისის შესაბამისი მაქსიმალური ოპერატორი M_B და წაკვეთილი მაქსიმალური ოპერატორი M_B^δ $(\delta > 0)$ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$M_B(f)(x) = \sup_{R \in B(x)} \frac{1}{|R|} \int_R |f|,$$

$$M_B^\delta(f)(x) = \sup_{R \in B(x), \operatorname{diam} R < \delta} \frac{1}{|R|} \int_R |f|,$$

სადაც $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ და $x \in \mathbb{R}^n$.

შევნიშნოთ, რომ თუ B არის ძვრის მიმართ ინვარიანტული ან ბუზემან-ფელერის ბაზისი, მაშინ ნებისმიერი f ფუნქციისთვის $\overline{D}_B\left(\int f, \cdot\right)$, $\underline{D}_B\left(\int f, \cdot\right)$, $M_B(f)$ და $M_B^\delta(f)$ ფუნქციები არიან ზომადები (იხ., მაგ., [5] ან [12]).

ქვემოთ ყველგან მიჩნეულია, რომ $\mathbb{R}^n$ სივრცის განზომილება მეტია ერთზე.

B ბაზისისთვის F_B-თი აღვნიშნოთ ყველა $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის კლასი, რომლის ინტეგრალი დიფერენცირებადია B ბაზისის მიმართ.

Γ_n-თი აღვნიშნოთ $\mathbb{R}^n$-ში ყველა მობრუნების ოჯახი.

ვიტყვით, რომ f ფუნქცია მიიყვანება F კლასში ცვლადის γ გარდაქმნით, თუ $f \circ \gamma \in F$.

დისერტაცია შედგება ექვსი პარაგრაფისგან.

პირველ პარაგრაფში შესწავლილია ა. ზიგმუნდის ამოცანა საკოორდინატო ღერძების შერჩევის მეშვეობით (ე.ი. ცვლადის გარდაქმნით, რომელიც წარმოადგენს მობრუნებას) ფუნქციის თვისებების გაუმჯობესების შესაძლებლობის შესახებ.

ცვლადის გარდაქმნის მეშვეობით ფუნქციის თვისებების გაუმჯობესების შესაძლებლობის შესახებ საკითხს აქვს საკმარისად მდიდარი ისტორია. ჰომეომორფიზმის მოქმედებისას ფურიეს

ტრიგონომეტრიული მწკრივის ყოფაქცევის გაუმჯობესების შესაძლებლობის შესახებ ცნობილია ჰ. ბორის, ა. ოლევსკის, ჟ.-პ. კაჰანისა და ი. კაცნელსონის, ა. სააკიანის მნიშვნელობანი შედეგები (იხ., მაგ., [11], [4], [18]).

ინტეგრალის დიფერენცირების თეორიაში ზემოთ აღნიშნული საკითხის შესწავლა დაწყებული იყო ა. ზიგმუნდის შემდეგი ამოცანით (იხ. [5, Ch. IV, §2]): შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია მიყვანილი იქნას F_{I} კლასში საკოორდინატო ღერძების მობრუნების მეშვეობით?

მარსტრანდმა [10] გასცა უარყოფითი პასუხი ამ კითხვას, ააგორა არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია ისეთი, რომ $f \circ \gamma \notin F_{\mathrm{I}}$ ნებისმიერი $\gamma \in \Gamma_2$ მობრუნებისთვის.

ა. ზიგმუნდის ამოცანა ზოგადი დასმით ფორმულირდება შემდეგნაირად: ვთქვათ, B არის ძვრის მიმართ ინვარიანტული ბაზისი, რომელიც არ ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$ კლასს. არსებობს თუ არა $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია, რომელიც შეუძლებელია მიყვანილ იქნას F_B კლასში საკოორდინატო ღერძების მობრუნების მეშვეობით? ამ მიმართულებით ცნობილი შედეგების ჩამოყალიბებისათვის შემოვიღოთ ზოგიერთი განსაზღვრება.

ძვრის მიმართ ინვარიანტული B ბაზისისთვის გ.გ. ონიანის მიერ (იხ. [12, Ch. II, §1] ან [13]) შემოღებული იყო შემდეგი ფუნქცია:

$$\sigma_B(\lambda) = \lim_{t\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{|\{M_B^{t\varepsilon}(\chi_{V_\varepsilon}) > \lambda\}|}{|V_\varepsilon|} \quad (0 < \lambda < 1),$$

სადაც V_ε არის კოორდინატთა სათავეში ცენტრის მქონე ε რადიუსიანი ბირთვი. აქ და ქვემოთ ყველგან χ_E აღნიშნავს E სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას. σ_B-ს ვუწოდოთ B ბაზისის სფერული მოარშიების ფუნქცია.

ადვილი შესამოწმებელია, რომ:

1) თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ არის ამოზნექილი ბაზისი, მაშინ $M_B(\chi_{V_\varepsilon})(x) \le C\varepsilon/\operatorname{dist}(x, V_\varepsilon)$ $(x \notin V_{2\varepsilon})$ შეფასების (იხ. [13, ლემა 1]) მეშვეობით გვაქვს:

$$\sigma_B(\lambda) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{|\{M_B(\chi_{V_\varepsilon}) > \lambda\}|}{|V_\varepsilon|};$$

2) თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$, მაშინ

$$\sigma_B(\lambda) = |\{M_B(\chi_V) > \lambda\}|,$$

სადაც V არის ერთეულოვანი ბირთვი (ე.ი. კოორდინატთა სათავეში ცენტრის ბირთვი 1-ის ტოლი რადიუსით).

ძვრის მიმართ ინვარიანტული B ბაზისისთვის ბ. ლოპეს-მელერომ [9] შემოიღო სფერული მოარშიების ფუნქციის შემდეგი სუსტი ვარიანტი:

$$\widetilde{\sigma}_B(\lambda) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{|\{M_B^{\varepsilon/\lambda}(\chi_{V_\varepsilon}) > \lambda\}|}{|V_\varepsilon|} \quad (0 < \lambda < 1).$$

აშკარაა, რომ

$$\widetilde{\sigma}_B(\lambda) \le \sigma_B(\lambda) \ \ (0 < \lambda < 1).$$

ვიტყვით, რომ $\sigma : (0,1) \to (0,\infty)$ ფუნქცია არის არარეგულარული, თუ

$$\overline{\lim_{\lambda \to 0}} \, \lambda \sigma(\lambda) = \infty.$$

$n \ge 2$-სთვის I_k^n-თი $(2 \le k \le n)$ აღვნიშნოთ ბაზისი, რომლისთვისაც $\mathrm{I}_k^n(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ შედგება x-ის შემცველი ყველა ღია n-განზომილებიანი ინტერვალისგან, რომელთა გვერდების სიგრძეები ღებულობენ არაუმეტეს k სხვადასხვა მნიშვნელობას. შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{I}_n^n = \mathrm{I}$.

B ბაზისისთვის S_B-თი აღვნიშნოთ ყველა არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციის კლასი, რომელთათვისაც $\overline{D}_B\left(\int f \circ \gamma, x\right) = \infty$ თითქმის ყველგან ყოველი $\gamma \in \Gamma_n$-სთვის.

ა. სტოკოლოსის [19], ბ. ლოპეს-მელეროს [9] და გ.გ. ონიანის [12, Ch. II, §1] (იხ. ასევე [13]) მიერ, შესაბამისად, დადგენილი იყო შემდეგი დებულებები.

თეორემა A. ყოველი $n \ge 2$ და $2 \le k \le n$-სთვის $S_{\mathrm{I}_k^n}$ კლასი არაცარიელია.

თეორემა B. თუ ძვრის მიმართ ინვარიანტულ B ბაზისს აქვს არარეგულარული სუსტი სფერული მოარშიების ფუნქცია $\widetilde{\sigma}_B$, მაშინ S_B კლასი არაცარიელია.

თეორემა C. თუ ძვრის მიმართ ინვარიანტულ B ბაზისს აქვს არარეგულარული სფერული მოარშიების ფუნქცია σ_B, მაშინ S_B კლასი არაცარიელია.

შევნიშნოთ, რომ $\widetilde{\sigma}_B(\lambda) \leq \sigma_B(\lambda)$ და $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{I}_k^n}(\lambda) \geq c\frac{1}{\lambda}\ln^{k-1}\frac{1}{\lambda}$ შეფასებებიდან გამომდინარეობს შემდეგი იმპლიკაციები: თეორემა C $\Rightarrow$ თეორემა B $\Rightarrow$ თეორემა A.

შემდეგი თეორემა იძლევა პასუხს ზიგმუნდის განზოგადებულ ამოცანაზე $\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ ბაზისთა კლასისათვის.

თეორემა 1.1. თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, მაშინ S_B კლასი არაცარიელია.

თეორემა 1.1 მტკიცდება თეორემა C-ს გამოყენებით შემდეგი ლემის საფუძველზე.

ლემა 1.4. თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, მაშინ B ბაზისს აქვს არარეგულარული სფერული მოარშიების ფუნქცია.

მეორე პარაგრაფში შესწავლილია დიფერენცირებადი ინტეგრალის მქონე ფუნქციათა კლასების ინვარიანტულობის საკითხი მობრუნებების მიმართ.

კარგი ანალიზური თვისების მქონე ფუნქციათა კლასი შეიძლება ძალიან მგრძნობიარე იყოს ცვლადის გარდაქმნის მიმართ. გავიხსენოთ ამ ტიპის შედეგი, რომელიც ეკუთვნის ა. ბერლინგს და ჰ. ჰელსონს [1]: ვთქვათ $\mathbb{T}$ არის ერთეულოვანი წრეწირი კომპლექსურ სიბრტყეზე და $A(\mathbb{T})$ არის $\mathbb{T}$-ზე განსაზღვრული ყველა უწყვეტი ფუნქციის კლასი, რომელთაც აქვთ აბსოლუტურად კრებადი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივი. $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ ჰომეომორფიზმისთვის გვაქვს, რომ $f \in A(\mathbb{T}) \Rightarrow f\circ\gamma \in A(\mathbb{T})$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ γ არის შემდეგი ტიპის: $\gamma(e^{it}) = e^{i(kt+a)}$, სადაც $k \in \{-1, 1\}$ და $a \in [-\pi, \pi]$.

ფუნქციათა F კლასს ეწოდება ინვარიანტული ცვლადის გარდაქმნათა Γ კლასის მიმართ, თუ $(f \in F, \gamma \in \Gamma) \Rightarrow f \circ \gamma \in F$.

ასე, რომ $A(\mathbb{T})$ კლასი ინვარიანტულია მხოლოდ მობრუნებების, შეუღლების და მათი კომპოზიციების მიმართ. კერძოდ, არსებობს დიფეომორფიზმი $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, რომლის მიმართ $A(\mathbb{T})$ არაა ინვარიანტული.

მრავალი ცვლადის ფუნქციების თვისებების დამოკიდებულება საკოორდინატო ღერძების შერჩევაზე (ე.ი. სტანდარტული ორთოგონალური საკოორდინატო სისტემის მობრუნებაზე) შეისწავლებოდა სხვადასხვა ავტორების მიერ.

გ. ლეფსვერიძის [8], გ.გ. ონიანის [14] და ა. სტოკოლოსის [20] შედეგებიდან გამომდინარეობს, რომ F_{I} კლასი არაინვარიანტულია ცვლადის წრფივი გარდაქმნების მიმართ, კერძოდ მობრუნებების მიმართ. ანალოგიური შედეგი დადგენილი იყო ო.დრაგოშანსკის მიერ [2] ორი ცვლადის უწყვეტ ფუნქციათა კლასისათვის, რომელთაც აქვთ პრინსჰეიმის აზრით თითქმის ყველგან კრებადი ფურიეს მწკრივი (ფურიეს ინტეგრალი).

ორგანზომილებიან შემთხვევაში გ. კარაგულიანმა [6] დაადგინა I ბაზისის მიხედვით დიფერენცირებადობის თვალსაზრისით იმ განსაკუთრებულობების სრული დახასიათება, რომელიც შეიძლება ჰქონდეს ფიქსირებული ფუნქციის ინტეგრალს საკოორდინატო სისტემის სხვადასხვა არჩევისას. ამ საკითხის მრავალგანზომილებიანი ასპექტი შესწავლილი იყო გ.გ. ონიანის მიერ [15].

მ. დიაჩენკომ [3] განიხილა სხვადასხვა აზრით სასრული ვარიაციის ფუნქციათა ორგანზომილებიანი კლასების Γ_2-ის მიმართ ინვარიანტულობის ამოცანა.

მობრუნების მიმართ F_{I} კლასის არაინვარიანტულობის შედეგი შეიძლება გავრცელდეს საკმაოდ ზოგადი ტიპის ბაზისებზე. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 2.1. თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, მაშინ F_B კლასი არაა ინვარიანტული მობრუნებების მიმართ, უფრო მეტიც, არსებობს არაუარყოფითი $f \in F_{\mathrm{I}}$ ფუნქცია ისეთი, რომ $f \circ \gamma \notin F_B$ რომელიდაც $\gamma \in \Gamma_n$ მობრუნებისათვის.

შევნიშნოთ, რომ თუ B ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$-ს, მაშინ მობრუნებების მიმართ F_B კლასის ინვარიანტულობის საკითხი ტრივიალურია. კერძოდ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ მობრუნება ზომის შემნახავი ასახვაა, დავასკვნით F_B-ს მობრუნებების მიმართ ინვარიანტულობას.

მესამე პარაგრაფში შემოღებულია სინგულარული მობრუნე-ბების სიმრავლეები და დადგენილია ზოგიერთი შედეგი მათი სტრუქტურის შესახებ.

ვთქვათ B არის ბაზისი $\mathbb{R}^n$-ში და $\gamma \in \Gamma_n$. B ბაზისის γ-მობრუნება განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$B(\gamma)(x) = \{x + \gamma(R - x) : R \in B(x)\} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

დავუშვათ B ძვრის მიმართ ინვარიანტულია. მაშინ ადვილი შე-სასმოწმებელია, რომ "მობრუნებული" $f \circ \gamma$ ფუნქციის ინტეგრა-ლის დიფერენცირებადობა B ბაზისის მიხედვით x წერტილში, ეკვივალენტურია f ფუნქციის ინტეგრალის დიფერენცირებადო-ბისა "მობრუნებული" $B(\gamma^{-1})$ ბაზისის მიმართ $\gamma^{-1}(x)$ წერტილში. შედეგად, $f \circ \gamma$ $(\gamma \in \Gamma_n)$ ფუნქციების ყოფაქცევის შესწავლა B ბაზისის მიმართ შეიძლება დავიყვანოთ f ფუნქციის ყოფაქცევის შესწავლაზე $B(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma_n)$ ბაზისების მიმართ.

ვთქვათ B არის ბაზისი $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ კლასიდან. თეორემა 2.1-ის ძალით არსებობს ფუნქცია, რომელსაც აქვს არაერთგ-ვაროვანი ყოფაქცევა მობრუნებული $B(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma_n)$ ბაზისების მიმართ, უფრო ზუსტად, $\int f$ არაა დიფერენცირებადი $B(\gamma)$ ბაზი-სის მიმართ ზოგიერთი მობრუნებისათვის და იმავდროულად $\int f$ დიფერენცირებადია $B(\gamma)$ ბაზისის მიმართ ზოგიერთი მობრუნე-ბისათვის. ამგვარად, f ფუნქციისათვის ზოგი γ მობრუნება არის "სინგულარული" (არადიფერენცირებადობა $B(\gamma)$-ს მიმართ) და ზოგი γ მობრუნება არის "რეგულარული" (დიფერენცირებადო-ბა $B(\gamma)$-ს მიმართ). ამასთან დაკავშირებით ბუნებრივად ისმის კითხვა: რა სახის შეიძლება იყოს სინგულარული და რეგულარუ-ლი მობრუნებების სიმრავლეები ფიქსირებული ფუნქციისათვის? შევნიშნოთ, რომ დუალურობის მოსაზრებების გამო შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ სინგულარული მობრუნებების სიმრავლეების შესწავლით.

ძლიერად დიფერენცირებადობის პროცესის შემთხვევაში (ე.ი. როცა $B = \mathrm{I}$) დასმული ამოცანა შესწავლილი იყო გ. კარაგუ-ლიანის [6], გ.გ. ონიანის [12, 14, 16], გ. ლეფსვერიძის [8] და ა. სტოკოლოსის [20] მიერ.

აღნიშნულ ამოცანასთან დაკავშირებით შემოვიღოთ სინგულარული მობრუნებების სიმრავლის მკაცრი განსაზღვრება: დავუშვათ B არის ბაზისი $\mathbb{R}^2$-ში და $E \subset \Gamma_2$. E სიმრავლეს ეწოდება W_B-სიმრავლე, თუ არსებობს $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია შემდეგი ორი თვისებით:

$$f \notin F_{B(\gamma)} \text{ ყოველი } \gamma \in E\text{-სთვის;}$$

$$f \in F_{B(\gamma)} \text{ ყოველი } \gamma \notin E\text{-სთვის.}$$

შემოვიღოთ ასევე "ძლიერად" სინგულარული მობრუნებების სიმრავლის განსაზღვრება: ვთქვათ B არის ბაზისი $\mathbb{R}^2$-ში და $E \subset \Gamma_2$. E-ს ეწოდება R_B-სიმრავლე, თუ არსებობს $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია შემდეგი თვისებებით:

$$\overline{D}_{B(\gamma)}\left(\int f, x\right) = \infty \text{ თ.ყ. ყოველი } \gamma \in E\text{-სთვის;}$$

$$f \in F_{B(\gamma)} \text{ ყოველი } \gamma \notin E\text{-სთვის.}$$

ცხადია, რომ ყოველი R_B-სიმრავლე არის W_B-სიმრავლე.

როდესაც $B = \mathrm{I}$, გამოვიყენებთ ტერმინებს: W და R-სიმრავლე. R-სიმრავლე და W-სიმრავლე შემოღებული იყო, შესაბამისად, [14] და [6] შრომებში.

ახლა საკითხი შეიძლება დავსვათ შემდეგნაირად: მოცემული B ბაზისისთვის რა სახის სიმრავლეები არიან W_B-სიმრავლეები (R_B-სიმრავლეები)?

შემდეგი თეორემები გვაძლევენ ტოპოლოგიური ხასიათის აუცილებელ პირობებს სინგულარული მობრუნებების სიმრავლეებისთვის.

თეორემა 3.1. ნებისმიერი ძვრის მიმართ ინვარიანტული B ბაზისისთვის $\mathbb{R}^2$-ში ყოველი W_B-სიმრავლე არის $G_{\delta\sigma}$ ტიპის.

თეორემა 3.2. ნებისმიერი ძვრის მიმართ ინვარიანტული B ბაზისისთვის $\mathbb{R}^2$-ში ყოველი R_B-სიმრავლე არის G_δ ტიპის.

W და R-სიმრავლეების შემთხვევაში, 3.1 და 3.2 თეორემები დამტკიცებული იყო, შესაბამისად, გ. კარაგულიანის [6] და გ.გ. ონიანის [14] მიერ.

ახლა შემოვიღოთ W_B და R_B-სიმრავლეთა ცნებების შემდეგი განზოგადებები:

ვთქვათ B და H ბაზისებია $\mathbb{R}^n$-ში, $B \subset H$ და $E \subset \Gamma_n$. E-ს ეწოდება $W_{B,H}$-სიმრავლე ($W^+_{B,H}$-სიმრავლე), თუ არსებობს $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქცია ($f \in L(\mathbb{R}^n), f \geq 0$) შემდეგი თვისებებით:

$$f \notin F_{B(\gamma)} \text{ ყოველი } \gamma \in E\text{-სთვის};$$

$$f \in F_{H(\gamma)} \text{ ყოველი } \gamma \notin E\text{-სთვის}.$$

ვთქვათ B და H ბაზისებია $\mathbb{R}^n$-ში, $B \subset H$ და $E \subset \Gamma_n$. E-ს ეწოდება $R_{B,H}$-სიმრავლე ($R^+_{B,H}$-სიმრავლე), თუ არსებობს $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ($f \in L(\mathbb{R}^n), f \geq 0$) ფუნქცია თვისებებით:

$$\overline{D}_{B(\gamma)}\left(\int f, x\right) = \infty \text{ თ.ყ. ყოველი } \gamma \in E\text{-სთვის};$$

$$f \in F_{H(\gamma)} \text{ ყოველი } \gamma \notin E\text{-სთვის}.$$

თუ $B = H$, მაშინ $W^+_{B,B}$-სიმრავლის ($R^+_{B,B}$-სიმრავლის) ნაცვლად გამოვიყენებთ ტერმინს W^+_B-სიმრავლე (R^+_B-სიმრავლე).

შენიშვნა 3.1. ცხადია, რომ:

1) თუ $B = H$, მაშინ $W_{B,B}$-სიმრავლის ($R_{B,B}$-სიმრავლის) და W_B-სიმრავლის (R_B-სიმრავლის) ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა;

2) ყოველი $W^+_{B,H}(R^+_{B,H})$-სიმრავლე არის $W_{B,H}(R_{B,H})$-სიმრავლე;

3) ყოველი $W_{B,H}(W^+_{B,H}, R_{B,H}, R^+_{B,H})$-სიმრავლე არის W_B (W^+_B, R_B, R^+_B)-სიმრავლე.

შენიშვნა 3.2. შენიშვნა 3.1-ის გათვალისწინებით 3.1 და 3.2 თეორემებიდან გვაქვს: თუ B და H ძვრის მიმართ ინვარიანტული ბაზისებია და $B \subset H$, მაშინ:

1) ყოველი $W_{B,H}$-სიმრავლე არის $G_{\delta,\sigma}$ ტიპის;

2) ყოველი $R_{B,H}$-სიმრავლე არის G_δ ტიპის.

შედეგად, 3.1 შენიშვნის გათვალისწინებით ასევე მივიღებთ: ყოველი $W^+_{B,H}$-სიმრავლე და ყოველი W^+_B-სიმრავლე არის $G_{\delta,\sigma}$ ტიპის; ყოველი $R^+_{B,H}$-სიმრავლე და R^+_B-სიმრავლე არის G_δ ტიპის.

თეორემა 3.3. ვთქვათ B და H ბაზისებია $\mathbb{R}^2$-ში და $B \subset H$. მაშინ $R_{B,H}$-სიმრავლეების ($R^+_{B,H}$-სიმრავლეების) არაუმეტეს თვლადი ოჯახის გაერთიანება არის $W_{B,H}$-სიმრავლე ($W^+_{B,H}$-სიმრავლე).

არაცარიელი $E_1 \subset \Gamma_2$ და $E_2 \subset \Gamma_2$ სიმრავლეებისთვის აღვნიშნოთ: $E_1 E_2 = \{\gamma_1 \circ \gamma_2 : \gamma_1 \in E_1, \gamma_2 \in E\}$. $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლეს ვუწოდოთ სიმეტრიული, თუ $E = \Pi E$.

B ბაზისს $\mathbb{R}^2$-ში ეწოდება სიმეტრიული, თუ $B(\gamma) = B$ ყოველი $\gamma \in \Pi$-სთვის. შევნიშნოთ, რომ $\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)$ ბაზისი სიმეტრიულია.

შენიშვნა 3.3. ვთქვათ მოცემულია B და H ბაზისები და $B \subset H$. მარტივი დასანახია, რომ თუ B არის სიმეტრიული, მაშინ ყოველი $W_{B,H}$ ($W^+_{B,H}$, $R_{B,H}$, $R^+_{B,H}$)-სიმრავლე სიმეტრიულია.

მეოთხე პარაგრაფში ნაპოვნია სინგულარული მობრუნებების სიმრავლეების ზოგიერთი კლასი. მიღებული შედეგებიდან გამომდინარეობს სინგულარული მობრუნებების არაუმეტეს თვლადი სიმრავლეების დახასიათება სიმეტრიული ბაზისებისათვის $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ კლასიდან.

თეორემა 4.1. ვთქვათ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. მაშინ ყოველი არაუმეტეს თვლადი $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლისთვის და მისი მიდამოთა ყოველი (V_k) მიმდევრობისთვის, არსებობს არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია ისეთი, რომ:

1) ყოველი $\gamma \in E$-სთვის, $\overline{D}_{B(\gamma)}(\int f, x) = \infty$ თ.ყ.;

2) ყოველი $k \in \mathbb{N}$-სთვის, $f \in F_{\mathrm{I}(\Gamma_2 \setminus \Pi V_k)}$. შედეგად, ყოველი $\gamma \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} \Pi V_k$-სთვის გვაქვს: $f \in F_{\mathrm{I}(\gamma)}$;

3) თუ $\gamma \in \Gamma_2$-სთვის $\overline{D}_{B(\gamma)}(\int f, x) = \infty$ სრულდება რაიმე დადებითი ზომის სიმრავლეზე, მაშინ იგივე პირობა სამართლიანია თითქმის ყველგან.

შედეგი 4.1. ვთქვათ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. მაშინ:

1) ყოველი არაუმეტეს თვლადი სიმეტრიული $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის $W^+_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე;

2) ყოველი არაუმეტეს თვლადი სიმეტრიული G_δ ტიპის სიმრავლე არის $R^+_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე.

3.1 და 3.2 თეორემების გათვალისწინებით 4.1 შედეგიდან მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

შედეგი 4.2. ვთქვათ B სიმეტრიული ბაზისია $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ კლასიდან. მაშინ:

1) არაუმეტეს თვლადი $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის $W_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე ($W^+_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E არის სიმეტრიული;

2) არაუმეტეს თვლადი $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის $R_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე ($R^+_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე) მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E არის სიმეტრიული და G_δ ტიპის.

თეორემა 4.1-დან აგრეთვე მიიღება შემდეგი დებულება.

შედეგი 4.3. ვთქვათ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. მაშინ არსებობს არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^2)$ ფუნქცია, რომლისთვისაც სიმრავლე

$$\{\gamma \in \Gamma_2 : \overline{D}_{B(\gamma)}\left(\int f, x\right) = \infty \ \text{თ.ყ.}\}$$

არის მეორე კატეგორიის და, შედეგად, კონტინუუმის სიმძლავრის.

შედეგი 4.4. ვთქვათ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. მაშინ არსებობს $W^+_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე, რომელიც არის მეორე კატეგორიის და შედეგად კონტინუუმის სიმძლავრის.

ვიტყვით, რომ B ბაზისს აქვს სუსტი ბეზიკოვიჩის თვისება, თუ ყოველი არაუარყოფითი $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ფუნქციისათვის

$$\{x : f(x) < \overline{D}_B(\textstyle\int f, x) < \infty\}$$

სიმრავლე არის ნული ზომის. შევნიშნოთ, რომ მ. გუსმანის და მ. მენარგესის შედეგის ძალით (იხ. [5, Ch. IV, §3]) ყოველ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$ ბაზისს აქვს სუსტი ბეზიკოვიჩის თვისება. აქვე შევნიშნოთ, რომ [17]-ში ნაპოვნია ინტერვალებისაგან შედგენილ ბაზისთა უფრო ზოგადი კლასი, რომელსაც აქვთ სუსტი ბეზიკოვიჩის თვისება.

შემდეგი დებულება გამომდინარეობს 4.3 შედეგიდან.

შედეგი 4.5. ვთქვათ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. თუ დამატებით ცნობილია, რომ B ბაზისს აქვს სუსტი ბეზიკოვიჩის თვისება, მაშინ არსებობს მეორე კატეგორიის და, შედეგად, კონტინუუმის სიმძლავრის $R^+_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე.

რადგანაც ნებისმიერი $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)}$ ბაზისისთვის $W_{B,\mathrm{I}}$ ($W^+_{B,\mathrm{I}}$, $R_{B,\mathrm{I}}$, $R^+_{B,\mathrm{I}}$)-სიმრავლე არის W_B (W^+_B, R_B, R^+_B)-სიმრავლე, ამიტომ 4.1-4.5 შედეგებიდან გამომდინარეობენ შესაბამისი დებულები W_B (W^+_B, R_B, R^+_B)-სიმრავლეებისთვის, კერძოდ, 4.2 შედეგიდან გამომდინარეობს შემდეგი დებულება.

შედეგი 4.6. ვთქვათ B არის სიმეტრიული ბაზისი $\mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ კლასიდან. მაშინ:

1) არაუმეტეს თვლადი $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის W_B (W^+_B)-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც E არის სიმეტრიული;

2) არაუმეტეს თვლადი $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის R_B (R^+_B)-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც E არის სიმეტრიული და G_δ ტიპის.

4.1 თეორემა და მისი შედეგები, $B = \mathrm{I}$ შემთხვევაში, დამტკიცებული იყო [14]-ში.

მეხუთე პარაგრაფში მოცემულია W_B და R_B-სიმრავლეების სრული დახასიათება ბაზისთა საკმაოდ ფართო კლასისათვის.

გ. კარაგულიანმა [6] დაადგინა W და R-სიმრავლეების სრული დახასიათება, სახელდობრ, [6]-ში დამტკიცებულია, რომ:

1) $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის W-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E არის სიმეტრიული და $G_{\delta\sigma}$ ტიპის.

2) $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის R-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა E არის სიმეტრიული და G_δ ტიპის.

[6]-ში შემოთავაზებული დამტკიცების სქემის განვითარების მეშვეობით, ჩვენ დავადგინეთ W_B და R_B-სიმრავლეების დახასიათება ბაზისთა ფართო კლასისთვის. კერძოდ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5.1. თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ ბაზისს აქვს არარეგულარული სფერული მოარშიების ფუნქცია, კერძოდ, თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ (იხ. ლემა 1.4), მაშინ:

1) ყოველი სიმეტრიული $G_{\delta\sigma}$ ტიპის $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის $W_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე;

2) ყოველი სიმეტრიული G_δ ტიპის $E \subset \Gamma_2$ სიმრავლე არის $R_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე.

თეორემა 5.1-ის პირველი წინადადება მიიღება მეორედან თეორემა 3.3-ის საფუძველზე.

3.1 და 3.2 თეორემების გათვალისწინებით თეორემა 5.1-დან მიიღება შემდეგი დებულება.

შედეგი 5.1. თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ სიმეტრიულ ბაზისს აქვს არარეგულარული სფერული მოარშიების ფუნქცია, კერძოდ, თუ B არის სიმეტრიული და $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, მაშინ:

1) $E \subset \Gamma_2$ არის $W_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც E არის სიმეტრიული და $G_{\delta\sigma}$ ტიპის;

2) $E \subset \Gamma_2$ არის $R_{B,\mathrm{I}}$-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც E არის სიმეტრიული და G_δ ტიპის.

შედეგი 5.2. თუ $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ სიმეტრიულ ბაზისს აქვს არარეგულარული სფერული მოარშიების ფუნქცია, კერძოდ, თუ B არის სიმეტრიული და $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, მაშინ:

1) $E \subset \Gamma_2$ არის W_B-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც E არის სიმეტრიული და $G_{\delta\sigma}$ ტიპის;

2) $E \subset \Gamma_2$ არის R_B-სიმრავლე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც E არის სიმეტრიული და G_δ ტიპის.

თეორემა 5.1-ის დამტკიცებაში აგებული ფუნქცია დებულობს როგორც დადებით, ასევე უარყოფით მნიშვნელობებს. ამიტომ თეორემა 5.1-ის დამტკიცების მეთოდი არ გვაძლევს საშუალებას დავახასიათოთ W_B^+ და R_B^+-სიმრავლეები. შევნიშნავთ, რომ W_B^+ და R_B^+ სიმრავლეების დახასიათების ამოცანა ღიაა $B = \mathrm{I}$ შემთხვევაშიც კი.

მეექვსე პარაგრაფში აგებულია სინგულარული ლებეგ-სტილტიესის ზომები, რომლებსაც აქვთ თითქმის ყველგან "არაკრობადი" საშუალოები.

ლებეგ-სტილტიესის μ ზომის და B ბაზისისთვის

$$\overline{D}_B(\mu,x) = \varlimsup_{R\in B(x),\,\mathrm{diam}\,R\to 0} \frac{\mu(R)}{|R|}, \quad \underline{D}_B(\mu,x) = \varliminf_{R\in B(x),\,\mathrm{diam}\,R\to 0} \frac{\mu(R)}{|R|}$$

რიცხვებს ეწოდება μ ზომის ზედა და ქვედა წარმოებული B ბაზისის მიმართ x წერტილში. თუ ზედა და ქვედა წარმოებულები ერთმანეთს ემთხვევა, მაშინ მათ საერთო მნიშვნელობას ეწოდება

μ ზომის წარმოებული B ბაზისის მიმართ x წერტილში და აღინიშნება შემდეგნაირად $D_B(\mu, x)$.

ვიტყვით, რომ B ბაზისი ადიფერენცირებს μ ლებეგ-სტილტიესის ზომას, თუ $D_B(\mu, x)$ არსებობს თითქმის ყოველი $x \in \mathbb{R}^n$-სთვის;

ლებეგ-სტილტიესის μ ზომას ეწოდება:

- სინგულარული, თუ არსებობს ბორელის E სიმრავლე ისეთი, რომ $|E| = 0$ და $\mu(A) = \mu(A \cap E)$ ყოველი ბორელის A სიმრავლისთვის;
- დისკრეტული, თუ მას აქვს სახე: $\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_k \delta_{a_k}$, სადაც $m_k \geq 0$ და δ_{a_k} არის დირაკის ზომა, რომლის საყრდენი არის a_k წერტილი.

ცხადია, რომ ყოველი დისკრეტული ლებეგ-სტილტიესის ზომა არის სინგულარული.

ცნობილია, რომ (იხ., მაგ., [21, Ch. V, §7]) თუ μ არის სინგულარული ლებეგ-სტილტიესის ზომა, მაშინ

$$D_{\mathrm{Q}}(\mu, x) = 0 \text{ თითქმის ყველგან.}$$

სინგულარული ლებეგ-სტილტიესის ზომები კარგავენ "ქრობადობის" თვისებას, თუ Q შეცვლილია ნებისმიერი ძვრის მიმართ ინვრიანტული ბაზისით, რომელიც არ ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$კლასს. უფრო მეტიც, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6.1. ნებისმიერი ძვრის მიმართ ინვარიანტული B ბაზისისთვის, რომელიც არ ადიფერენცირებს $L(\mathbb{R}^n)$-ს, არსებობს დისკრეტული სასრული ლებეგ-სტილტიესის ზომა μ, ისეთი, რომ

$$\overline{D}_B(\mu, x) = \infty \text{ თითქმის ყველგან.}$$

$B = \mathrm{I}$ შემთხვევაში, თეორემა 6.1 გამომდინარეობს გ. კარაგულიანის [7] შედეგიდან $\mathbb{R}^n$-ში შემთხვევითი ზომების შესახებ.

ციტირებული ლიტერატურა

[1] A. Beurling, H. Helson, *Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers*, Math. Scand. **1** (1953), 120-126.

[2] O. S. Dragoshanskii, *Convergence of Fourier double series and Fourier integrals of functions on T^2 and $\mathbb{R}^2$ after rotations of coordinates*, Sbornik Math. **191** (2000), 1587-1606.

[3] M. I. Dyachenko, *Rotation of coordinate axes and two-dimensional classes of functions with bounded generalized variation*, Moscow Univ. Math. Bull. **3** (2008), 26-30.

[4] C. Goffman, T. Nishiura, D. Waterman, *Homeomorphisms in Analysis*, Mathematical surveys and monographs Vol. 54, American Mathematical Society, 1991.

[5] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics, 481. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[6] G. A. Karagulyan, *A complete characterization of R-sets in the theory of differentiation of integrals*, Studia Math. **181** (1)(2007), 17-32.

[7] G. Karagulyan, *A necessary and sufficient condition for differentiability of integrals of random measures in $\mathbb{R}^n$ over n-dimensional intervals*, Math. Notes **49** (1991), 375-378.

[8] G. L. Lepsveridze, *On strong differentiability of integrals along different directions*, Georgian Math. J. **2** (1995), no. 6, 613-630.

[9] B. López Melero, *A negative result in differentiation theory*, Studia Math. **72** (1982), 173-182.

[10] J. Marstrand, *A counter-example in the theory of strong differentiation*, Bull. London Math. Soc. **9** (1977), 209-211.

[11] A. M. Olevskii, *Modifications of functions and Fourier series*, Uspekhi Mat. Nauk **40** (1985), 157-193 (Russian), translation: Russian Math. Surveys **40**(1985), 181-224.

[12] G. G. Oniani, *Differentiation of Lebesgue integrals*, Tbilisi Univ. Press, Tbilisi, 1998 (in Russian).

[13] G. G. Oniani, *A resonance theorem for a family of translation invariant differentiation bases*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **168** (2015).

[14] G. G. Oniani, *On the differentiation of integrals with respect to the bases $B_2(\theta)$*, East J. Approx. **3** (1997), 275-301.

[15] G. G. Oniani, *On the strong differentiation of multiple integrals along different frames*, Georgian Math. J. **12** (2005), no. 2, 349-368.

[16] G. G. Oniani, *On the integrability of strong maximal functions corresponding to different frames*, Georgian Math. J. **6** (1999), no. 2, 149-168.

[17] G. G. Oniani, *On upper and lower derivatives of integrals with respect to convex differentiation bases*, Math. Notes **76** (2004), No.5, 702-714.

[18] A. A. Saakyan, *On Bohr's theorem for multiple Fourier series*, Math. Notes **64** (1998), No. 6, 787-797; translation from Mat. Zametki **64** (1998), No. 6, 913-924.

[19] A. M. Stokolos, *An inequality for equimeasurable rearrangements and its applications in the theory of differentiation of integrals*, Anal. Math. **9** (1983), 133-146.

[20] A. M. Stokolos, *On a problem of A. Zygmund*, Math. Notes **64** (1998), 646-657.

[21] S. Saks, *Theory of the Integral*, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1964.

დისერტაციის თემაზე გამოქვეყნებული შრომები

[I] K. A. Chubinidze, *On sets of singular rotations for translation invariant bases*, Transactions of A. Razmadze Math. Inst. **170** (2016) (to appear).

[II] K. A. Chubinidze, *Rotation of coordinate axes and integrebility of maximal functions*, Book of abstracts of VI international conference of the Georgian Mathematical Union, 99-100.

[III] K. A. Chubinidze and G. G. Oniani, *Rotation of coordinate axes and differentiation of integrals with respect to translation invariant bases*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **167** (2015), 107-112.

[IV] K. A. Chubinidze and G. G. Oniani, *Note on the differentiability of singular Lebesgue-Stieltjes measures*, Georgian Math. J. **22** (2015), 349-354.

[V] K. A. Chubinidze and G. G. Oniani, *Note on singular Lebesgue-Stieltjes measures*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **164** (2014), 98-99.

[VI] G. G. Oniani and K. A. Chubinidze, *Rotation of coordinate axes and differentiation of integrals with respect to translation invariant bases*, Abstracts of the International Conference "Function spaces and function approximation theory" dedicated to 110th anniversary of academician S. M. Nikolskii (May 25-29, 2015, Moscow), pp. 43-46.

Akaki Tsereteli State University
Faculty of Exact and Natural Sciences

With the rights of the Manuscript

Kakha Chubinidze

Rotation of Coordinate axes and Differentiation of Integrals with respect to Translation Invariant Bases

AN ABSTRACT
of the dissertation for the academic degree
of Doctor of Mathematics

Kutaisi
2016

The Dissertation has been carried out at Akaki Tsereteli State University Department of Mathematics.

Supervisor: **Giorgi Oniani**
Doctor of Physics and Mathematics,
Professor of Akaki Tsereteli State University

Reviewers: **1. Valentin Skvortsov**
Doctor of Physics and Mathematics,
Professor of M. Lomonosov Moscow State University

2. Duglas Ugulava
Doctor of Physics and Mathematics,
Professor of Georgian Technical University

The Defence of the Dissertation will be held on 27 February 2016, at 13:00 at the meeting of dissertation commission created by dissertation board of the Faculty of Exact and Natural Sciences of Akaki Tsereteli State University

Address: Block I, room 1114, 59 Tamar Mepe St., Kutaisi 4600.

The Dissertation will be available in the Akaki Tsereteli State University Library (59 Tamar Mepe St., Kutaisi, 4600)

The Abstract of the Dissertation is dispatched on 01.02.2016.

The Secretary of the Dissertation Council *Z. Sokhadze*

Topicality of Research. The study of the influence of a change of variable on analytical properties of a function is one of the important problems in harmonic analysis. The following two main questions were the object of research in this direction: 1) *Is it possible to achieve fulfillment of a given analytical property of a function by means of a change of variable of given type*? 2) *What kind of changes of variable conserves a given analytical property of a function*? In connection with above mentioned problems, the important results were obtained by H. Bohr, A. Beurling and H. Helson, A. Olevskii, J.-P. Kahane and Y. Katznelson, A. Saakyan, U. Jurkat and D. Waterman, A. Baerstein and D. Waterman, in the case, when analytical property of a function is an uniform or absolute convergence of Fourier trigonometric series and a change of variable is a homeomorphism of torus. The possibility of improvement and conservation of function differential properties by means of homeomorphic mapping were studied by E. Brukner and C. Goffman, M. Laczkovich and D. Preiss. Abovementioned results are given in the review work by Olevskii [11] and in the monograph by C. Goffman, T. Nishiura and D. Waterman [4].

The study of the influence of a choice of coordinate axes (i.e. changing a variable, which is a rotation around the origin) on the properties of summable functions of several variables was initiated by A.Zygmund, in particular, he posed a problem concerning the possibility of achieving strong differentiability by means of rotations. The problems on the possibility of achieving and conservation of the properties of strong integral means' convergence, convergence of multiple Fourier series and Fourier integrals in Pringsheim sense and belonging to the classes of functions with bounded variation in various senses in case of rotations, were studied by J. Marstrand, B. Lopez-Melero, A. Stokolos, G. G. Oniani, G. Lepsveridze, G. Karagulyan, M. Dyachenko and O. Dragoshanskii.

The Aim of Dissertation. The proposed dissertation is aimed at: the study of A. Zygmund's problem on possibility of achievement of strong differentiability of an integral by means of a rotation (i.e. choosing coordinate axes) for general classes of bases; investigation of question of conservation of integral differentiation property in case of rotations for translation invariant bases consisting of multi-dimensional intervals; the study of singularities from the standpoint of differentiability of the integral with respect to a given basis, which may have a fixed function for various choices of coordinate axes; the study of differential properties of singular Lebesgue-Stieltjes measures.

Research Novelty.

1) There is given a solution of A. Zygmund's problem for Busemann-Feller and homothecy invariant bases, in particular, it is established, that if a basis of such type is nonstandard (i.e. if it does not differentiate the integral of some summable function), then there exists a function for which the differentiability of integral can not be achieved by means of rotations;
2) It is established that for an arbitrary translation invariant nonstandard basis consisting of multi-dimensional intervals, integral differentiation property is not conserved in case of rotations;
3) It is introduced the definitions of sets of singular rotations. These sets express the singularities, which may have a fixed function for various choices of coordinate axes from the standpoint of differentiability of the integral with respect to a given basis. It is established topological structure of sets of singular rotations;
4) It is given a characterization of not more than countable sets of singular rotations for an arbitrary translation invariant nonstandard basis formed of two-dimensional intervals;

5) It is given a complete characterization of sets of singular rotations for an arbitrary Busemann-Feller, homothecy invariant, nonstandard and symmetric basis formed of two-dimensional intervals.
6) It is established that singular Lebesgue–Stieltjes measures do not have the property of vanishing of means almost everywhere for any translation invariant nonstandard basis.

Approbation of Work. The dissertation results have been presented at V International Conference of the Georgian Mathematical Union (September 8–12, 2014, Batumi, Georgia); VI International Conference of the Georgian Mathematical Union (July 12–16, 2015, Batumi, Georgia); Swedish–Georgian Conference in Analysis & Dynamical Systems (July 15–22, 2015, Tbilisi, Georgia); International Conference "Function Spaces and Function Approximation Theory" dedicated to the 110th anniversary of Academician S. M. Nikolskii (May 25–29, 2015, Moscow, Russia); International Conference "Harmonic Analysis and Integral theory" dedicated to the 80th Jubelee of Professor V.A. Skvortsov (September 23–24, 2015, Moscow, Russia).

Publication. There are published six scientific works, which are listed below the text of this author's abstract.

The size and the structure. The dissertation contains 80 pages. It consists of the introduction, six sections and bibliography. The bibliography contains 32 names.

Content of Dissertation

First let us introduce some definitions and recall some results from the differentiation theory of integrals.

A mapping B defined on $\mathbb{R}^n$ is said to be a *differentiation basis* if for every $x \in \mathbb{R}^n$, $B(x)$ is a family of bounded measurable sets with positive measure and containing x, such that there exists a sequence $R_k \in B(x)$ $(k \in \mathbb{N})$ with $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} R_k = 0$.

For $f \in L(\mathbb{R}^n)$, the numbers

$$\overline{D}_B\left(\int f, x\right) = \varlimsup_{\substack{R \in B(x) \\ \operatorname{diam} R \to 0}} \frac{1}{|R|} \int_R f, \quad \underline{D}_B\left(\int f, x\right) = \varliminf_{\substack{R \in B(x) \\ \operatorname{diam} R \to 0}} \frac{1}{|R|} \int_R f$$

are called *the upper and the lower derivative,* respectively, *of the integral of f at a point x*. If the upper and the lower derivative coincide, then their combined value is called the *derivative of $\int f$ at a point x* and denoted by $D_B(\int f, x)$. We say that the *basis B differentiates* $\int f$ (or $\int f$ is differentiable with respect to B) if $\overline{D}_B(\int f, x) = \underline{D}_B(\int f, x) = f(x)$ for almost all $x \in \mathbb{R}^n$. If this is true for each f in the class of functions X we say that B differentiates X.

Denote by $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbb{R}^n), \mathbf{I} = \mathbf{I}(\mathbb{R}^n)$ and $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbb{R}^n)$ the bases of for which:

- $\mathbf{Q}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ consists of all open n-dimensional cubic intervals containing x;
- $\mathbf{I}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ consists of all open n-dimensional intervals containing x;
- $\mathbf{P}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ consists of all open n-dimensional rectangles containing x.

Note that differentiation with respect to $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{I}$ are called ordinary and strong differentiation, respectively.

About the bases $\mathbf{Q}$, $\mathbf{I}$ and $\mathbf{P}$ there are known following fundamental results (see e.g. [5]):

The basis of cubes $\mathbf{Q}$ *differentiates* $L(\mathbb{R}^n)$ (A. Lebesgue, 1910);

The basis of intervals $\mathbf{I}$ *differentiates* $L(1 + \ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ (B. Jessen, I. Marcinkiewicz and A. Zygmund, 1935);

The basis of intervals $\mathbf{I}$ *does not differentiate* $L(\mathbb{R}^n)$*, moreover,* $\mathbf{I}$ *does not differentiate any integral class* $\varphi(L)(\mathbb{R}^n)$ *wider than* $L(1 + \ln^+ L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ (S. Saks, 1935);

The basis of rectangles $\mathbf{P}$ *does not differentiate even the class* $L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L(\mathbb{R}^n)$ (A. Zygmund, 1927).

For a basis B, we denote by $\overline{B}$ the union of families $B(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

A basis B is called:

translation invariant (briefly, TI-basis) if $B(x)=\{x+R : R\in B(0)\}$ for every $x\in\mathbb{R}^n$;

homothecy invariant (briefly, HI-basis) if for every $x\in\mathbb{R}^n, R\in B(x)$ and a homothethy H with the centre at x we have that $H(R)\in B(x)$;

formed of sets from the class Δ if $\overline{B}\subset\Delta$;

convex if it is formed of the class of all convex sets;

Busemann–Feller basis if it is formed of open sets and the following condition holds: $(x\in\mathbb{R}^n, R\in B(x), y\in R)\Rightarrow R\in B(y)$.

Let us introduce the following notation:

$\mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ is the class of all translation invariant bases;

$\mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$ is the class of all homothecy invariant bases;

$\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}}$ is the class of all Busemann–Feller bases;

$\mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ is the class of all bases which does not differentiate $L(\mathbb{R}^n)$.

Note that if $B\in\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}}\cap\mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$, then $B\in\mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ (see e.g. [12, Ch. I, §3]).

A basis B is called *sub-basis of a basis* B'(denoted as $B\subset B'$) if $B(x)\subset B'(x)$ for every $x\in\mathbb{R}^n$. For a basis B by $\mathfrak{B}_B$ we will denote the class of all sub-basis of B.

The *maximal operator* M_B *and truncated maximal operator* M_B^δ $(\delta>0)$ *corresponding to a basis* B are defined as follows

$$M_B(f)(x)=\sup_{R\in B(x)}\frac{1}{|R|}\int_R|f|,$$

$$M_B^\delta(f)(x)=\sup_{R\in B(x),\operatorname{diam}R<\delta}\frac{1}{|R|}\int_R|f|,$$

where $f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ and $x\in\mathbb{R}^n$.

Note that if B is translation invariant or Busemann–Feller basis, then for any f the functions $\overline{D}_B\left(\int f,\cdot\right)$, $\underline{D}_B\left(\int f,\cdot\right)$, $M_B(f)$ and $M_B^\delta(f)$ are measurable (see e.g. [5] or [12]).

In what follows the dimension of the space $\mathbb{R}^n$ is assumed to be greater than 1.

For a basis B by F_B denote the class of all functions $f\in L(\mathbb{R}^n)$ the integrals of which are differentiable with respect to B.

By Γ_n denote the family of all rotations in $\mathbb{R}^n$.

We say that a function f is *reduced in the class* F *by a transformation of a variable* γ if $f \circ \gamma \in F$.

The work contains six sections.

In the first section of the work it is studied a problem of A. Zygmund concerning a possibility of improvement of function properties by means of choosing of coordinate axes(i.e. by means of a change of variable which is a rotation).

The question on possibility of improvement of a function properties by means of change of variable has quite rich history. Concerning the possibility of improvement Fourier trigonometric series behaviour by means of homeomorphic change of variable there are known important results of H. Bohr, A. Olevskii, J.-P. Kahane and Y. Katznelson, A. Saakyan (see e.g. [11], [4], [18]).

In the integral differentiation theory the study of the above mentioned question was began by the following problem of A. Zygmund (see [5, Ch. IV, §2]): *Can an arbitrary function* $f \in L(\mathbb{R}^2)$ *be reduced in the class* $F_{\mathbf{I}}$ *by means of a rotation of coordinate axes*?

J. Marstrand [10] gave the negative answer to the problem by constructing a non-negative function $f \in L(\mathbb{R}^2)$ such that $f \circ \gamma \notin F_{\mathbf{I}}$ for any rotation $\gamma \in \Gamma_2$.

The problem of A. Zygmund in general setting is formulated as follows: *Let* B *be a translation invariant basis which does not differentiate* $L(\mathbb{R}^n)$. *Does there exist a function* $f \in L(\mathbb{R}^n)$ *which can not be reduced in class* F_B *by means of rotation of coordinate axes*? To formulate the known results in this direction let us introduce some definitions.

For a translation invariant basis B by G. G. Oniani (see [12, Ch. II, §1] or [13]) it was defined the following function

$$\sigma_B(\lambda) = \lim_{t\to\infty} \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{|\{M_B^{t\varepsilon}(\chi_{V_\varepsilon}) > \lambda\}|}{|V_\varepsilon|} \quad (0 < \lambda < 1),$$

where V_ε is the ball with centre at the origin and with the radius ε. Here and below everywhere χ_E denotes the characteristic function of a set E. We will call σ_B *spherical halo function of* B.

It is easy to check that:

1) If $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}}$ is a convex basis, then due to the following estimation (see [13, Lemma 1]) $M_B(\chi_{V_\varepsilon})(x) \le C\varepsilon/\operatorname{dist}(x, V_\varepsilon)$ ($x \notin V_{2\varepsilon}$) we have

$$\sigma_B(\lambda) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{|\{M_B(\chi_{V_\varepsilon}) > \lambda\}|}{|V_\varepsilon|};$$

2) If $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$, then

$$\sigma_B(\lambda) = |\{M_B(\chi_V) > \lambda\}|,$$

where V is the unit ball.

For a translation invariant basis B by B. Lópes-Melero [9] it was introduced the following weak variant of the spherical halo function

$$\widetilde{\sigma}_B(\lambda) = \overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \frac{|\{M_B^{\varepsilon/\lambda}(\chi_{V_\varepsilon}) > \lambda\}|}{|V_\varepsilon|} \quad (0 < \lambda < 1),$$

Obviously,

$$\widetilde{\sigma}_B(\lambda) \le \sigma_B(\lambda) \ \ (0 < \lambda < 1).$$

We will say that a function $\sigma : (0,1) \to (0,\infty)$ is *non-regular* if

$$\overline{\lim_{\lambda \to 0}} \lambda\sigma(\lambda) = \infty.$$

For $n \ge 2$ and $2 \le k \le n$ by $\mathbf{I}_k^n$ denote the basis for which $\mathbf{I}_k^n(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$) consists of all open n-dimensional intervals containing x and the lengthes of edges of which take not more than k values. Note that $\mathbf{I}_n^n = \mathbf{I}$.

For a basis B denote by S_B the class of all non-negative functions $f \in L(\mathbb{R}^n)$ such that $\overline{D}_B\left(\int f \circ \gamma, x\right) = \infty$ almost everywhere for every $\gamma \in \Gamma_n$.

By A. Stokolos [19], B. Lópes-Melero [9] and G. G. Oniani [12, Ch. II, §1] (see also [13]), respectively, were established the following results.

Theorem A. *For every $n \ge 2$ and $2 \le k \le n$ the class $S_{\mathbf{I}_k^n}$ is non-empty.*

Theorem B. *If a translation invariant basis B has a non-regular weak spherical halo function $\widetilde{\sigma}_B$, then the class S_B is non-empty.*

Theorem C. *If a translation invariant basis B has a non-regular spherical halo function σ_B, then the class S_B is non-empty.*

Note that from the estimations: $\widetilde{\sigma}_B(\lambda) \leq \sigma_B(\lambda)$ and $\widetilde{\sigma}_{\mathbf{I}_k^n}(\lambda) \geq c\frac{1}{\lambda}\ln^{k-1}\frac{1}{\lambda}$ it follows the implications: Theorem C $\Rightarrow$ Theorem B $\Rightarrow$ Theorem A.

The following theorem gives the answer to Zygmund's generalized problem for the class of bases $\mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$.

Theorem 1.1. *If $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, then the class S_B is non-empty.*

Theorem 1.1 we prove using Theorem C on the basis of the following Lemma.

Lemma 1.4. *If $B \in \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, then B has a non-regular spherical halo function.*

In the second section the question on the invariance of classes of functions with differentiable integrals with respect to the class of transformations of variable consisting of all rotations is studied.

A class of functions with good analytical properties may be very sensitive with respect to changes of variable. Let us recall the result of such type belonging to A. Beurling and H. Helson [1]: *Let $\mathbb{T}$ be the unit circumference on the complex plane and $A(\mathbb{T})$ be the class of all continuous on $\mathbb{T}$ functions having absolutely convergent Fourier trigonometric series. For a homeomorphism $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ we have that $f \in A(\mathbb{T}) \Rightarrow f \circ \gamma \in A(\mathbb{T})$ if and only if γ is of the type $\gamma(e^{it}) = e^{i(kt+a)}$, where $k \in \{-1, 1\}$ and $a \in [-\pi, \pi]$.*

A class of functions F is called *invariant with respect to a class of transformations of a variable* Γ if $(f \in F, \gamma \in \Gamma) \Rightarrow f \circ \gamma \in F$.

Thus the only homeomorphisms with respect to which the class $A(\mathbb{T})$ is invariant are rotations, conjugation and their compositions. In particular, there exists a dipheomorpism $\gamma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ with respect to which $A(\mathbb{T})$ is not invariant.

The dependence of the properties of functions of several variables on a choice of coordinate axes (i.e. on a rotation of the standard orthogonal coordinate system) were studied by different authors.

From the results of G. Lepsveridze [8], G. G. Oniani [14] and A. Stokolos [20] it follows that the class $F_{\mathbf{I}}$ is not invariant with respect to linear changes of a variable, in particular with respect to rotations. An analogous result was established by O. Dragoshanskii [2] for the class of continuous functions of two variables, having an a.e. converging Fourier series (Fourier integral) in Pringsheim sense.

G. Karagulyan [6] gave, in the two-dimensional case, a complete characterization of singularities from the standpoint of differentiability with respect to a basis **I** which may have the integral of a fixed function for various choices of a coordinate system. The multi-dimensional aspect of this question was studied by G. G. Oniani [15].

M. Dyachenko [3] considered a problem of invariance with respect to Γ_2 of two-dimensional classes of functions with bounded variation in various senses.

The result on the non-invariance of the class $F_{\mathbf{I}}$ with respect to rotations can be extended to bases of quite general type. In particular, the following theorem is true.

Theorem 2.1. *If $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, then the class F_B is not invariant with respect to rotations, moreover, there exists a non-negative function $f \in F_{\mathbf{I}}$ such that $f \circ \gamma \notin F_B$ for some $\gamma \in \Gamma_n$.*

Note that if B differentiates $L(\mathbb{R}^n)$, then the question on the invariance of the class F_B with respect to rotations is trivial, in particular, taking into account that a rotation is measure preserving mapping we conclude the invariance of F_B with respect to rotations.

In the third section there are introduced definitions of sets of singular rotations and there are established some results concerning their structure.

Let B be a basis in $\mathbb{R}^n$ and $\gamma \in \Gamma_n$. The *γ-rotated basis B* is defined as follows

$$B(\gamma)(x) = \{x + \gamma(R - x) : R \in B(x)\} \quad (x \in \mathbb{R}^n).$$

Suppose B is translation invariant. Then it is easy to verify that the differentiation of the integral of a "rotated" function $f \circ \gamma$ with respect to B at a point x is equivalent to the differentiation of the integral of f with respect to the "rotated" basis $B(\gamma^{-1})$ at a point $\gamma^{-1}(x)$. Consequently, we can reduce the study of the behavior of functions $f \circ \gamma$ $(\gamma \in \Gamma_n)$ with respect to the basis B to the study of the behavior of f with respect to rotated bases $B(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma_n)$.

Let B be a basis from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. By virtue of Theorem 2.1 there exists a function having a non-homogeneous behaviour with respect to rotated bases $B(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma_n)$, more exactly, $\int f$ is not differentiable with respect to $B(\gamma)$ for some rotations and $\int f$ is differentiable with respect $B(\gamma)$ for some γ rotations. Thus for f some rotations γ are "singular" (non-differentiability with respect to $B(\gamma)$) and some rotations γ are "regular" (differentiability with respect to $B(\gamma)$). In this connection naturally arises problem: *what kind of may be sets of singular and of regular rotations for a fixed function*? Note that by duality argument we can restrict ourselves by studying sets of singular rotations.

The posed problem for the case of strong differentiability process (i.e., for the case $B = \mathbf{I}$) was studied in works of G. Karagulyan [6], G. G. Oniani [12, 14, 15], G. Lepsveridze [8] and A. Stokolos [20].

In connection to the posed problem let us introduce rigor definition of a set of singular rotations: Suppose B is a basis in $\mathbb{R}^2$ and $E \subset \Gamma_2$. Let us call E a *W_B-set* if there exists a function $f \in L(\mathbb{R}^2)$ with the following two properties:

$$f \notin F_{B(\gamma)} \text{ for every } \gamma \in E;$$

$$f \in F_{B(\gamma)} \text{ for every } \gamma \notin E.$$

Let us introduce also the definition of a set of "strongly" singular rotations: Suppose B is a basis in $\mathbb{R}^2$ and $E \subset \Gamma_2$. Let us call E an *R_B-set* if there exists a function $f \in L(\mathbb{R}^2)$ with the following two properties:

$$\overline{D}_{B(\gamma)}\left(\textstyle\int f, x\right) = \infty \text{ a.e. for every } \gamma \in E;$$

$$f \in F_{B(\gamma)} \text{ for every } \gamma \notin E.$$

It is clear that each R_B-set is W_B-set.

When $B = \mathbf{I}$ we will use terms W-set and R-set. The definitions of an R-set and of a W-set were introduced in [14] and [6], respectively.

Now the problem can be formulated as follows: *For a given basis B what kind of sets are W_B-sets (R_B-sets)?*

The following theorems give necessary conditions of topological character for sets of singular rotations.

Theorem 3.1. *For arbitrary translation invariant basis B in $\mathbb{R}^2$ each W_B-set has $G_{\delta\sigma}$ type.*

Theorem 3.2. *For arbitrary translation invariant basis B in $\mathbb{R}^2$ each R_B-set has G_δ type.*

For the case of W and R sets Theorems 3.1 and 3.2 were proved by G. Karagulyan [6] and G. G. Oniani [14], respectively.

Let us introduce the following generalizations of notions of a W_B-set and of an R_B-set:

Let B and H are bases in $\mathbb{R}^n$ with $B \subset H$ and $E \subset \Gamma_n$. Let us call E a $W_{B,H}$*-set* ($W^+_{B,H}$*-set*), if there exists a function $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ($f \in L(\mathbb{R}^n), f \geq 0$) with the following two properties:

$$f \notin F_{B(\gamma)} \text{ for every } \gamma \in E;$$

$$f \in F_{H(\gamma)} \text{ for every } \gamma \notin E.$$

Let B and H are bases in $\mathbb{R}^n$ with $B \subset H$ and $E \subset \Gamma_n$. Let us call E an $R_{B,H}$*-set* ($R^+_{B,H}$*-set*), if there exists a function $f \in L(\mathbb{R}^n)$ ($f \in L(\mathbb{R}^n), f \geq 0$) with the following two properties:

$$\overline{D}_{B(\gamma)}\left(\textstyle\int f, x\right) = \infty \text{ a.e. for every } \gamma \in E;$$

$$f \in F_{H(\gamma)} \text{ for every } \gamma \notin E.$$

If $B = H$, then instead of $W^+_{B,B}$-set ($R^+_{B,B}$-set) we will use term W^+_B-set (R^+_B-set).

Remark 3.1. It is clear that:

1) If $B = H$, then the notions of $W_{B,B}$-set ($R_{B,B}$-set) and of W_B-set (R_B-set) coincide;

2) each $W^+_{B,H}(R^+_{B,H})$-set is $W_{B,H}(R_{B,H})$-set;

3) each $W_{B,H}(W^+_{B,H}, R_{B,H}, R^+_{B,H})$-set is $W_B(W^+_B, R_B, R^+_B)$-set.

Remark 3.2. Taking into account conclusions of Remark 3.1 from Theorems 3.1 and 3.2 we have: If B and H are translation invariant bases with $B \subset H$, then:

1) each $W_{B,H}$-set is of $G_{\delta,\sigma}$ type;

2) each $R_{B,H}$-set is of G_δ type.

Consequently, taking into account Remark 3.1 again we have also that: each $W^+_{B,H}$-set and each W^+_B-set is of $G_{\delta,\sigma}$ type; each $R^+_{B,H}$-set and each R^+_B-set is of G_δ type.

Theorem 3.3. *For arbitrary bases B and H with $B \subset H$ not more than countable union of $R_{B,H}$-sets ($R^+_{B,H}$-sets) is $W_{B,H}$-set ($W^+_{B,H}$-set).*

For non-empty sets $E_1 \subset \Gamma_2$ and $E_2 \subset \Gamma_2$ denote $E_1E_2 = \{\gamma_1 \circ \gamma_2 : \gamma_1 \in E_1, \gamma_2 \in E\}$. A set $E \subset \Gamma_2$ let us call symmetric if $E = \Pi E$.

A basis B in $\mathbb{R}^2$ let us call *symmetric*, if $B(\gamma) = B$ for every $\gamma \in \Pi$. Note that the basis $\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)$ is symmetric.

Remark 3.3. Let bases B and H with $B \subset H$ are given. It is easy to see that if B is symmetric, then each $W_{B,H}(W^+_{B,H}, R_{B,H}, R^+_{B,H})$-set is symmetric.

In the forth section some classes of sets of singular rotations are found. From obtained results it follows a characterization of not more than countable sets of singular rotations for symmetric bases from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$.

Theorem 4.1. *Let $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. Then for every not more than countable set $E \subset \Gamma_2$ and for every sequence of its neighbourhoods (V_k) there is a non-negative function $f \in L(\mathbb{R}^2)$ such that*:

1) *For every $\gamma \in E$, $\overline{D}_{B(\gamma)}(\int f, x) = \infty$ almost everywhere*;

2) *For every* $k \in \mathbb{N}$, $f \in F_{\mathbf{I}(\Gamma_2 \setminus \Pi V_k)}$. *Consequently, for every* $\gamma \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} \Pi V_k$ *we have that* $f \in F_{\mathbf{I}(\gamma)}$;

3) *If for* $\gamma \in \Gamma_2$ *the condition* $\overline{D}_{B(\gamma)}(\int f, x) = \infty$ *is valid for points from some set of positive measure, then the same condition is valid almost everywhere.*

Corollary 4.1. *Let* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. *Then*:

1) *every not more than countable symmetric set* $E \subset \Gamma_2$ *is a* $W^+_{B,\mathbf{I}}$*-set*;

2) *every not more than countable symmetric set of* G_δ *type is a* $R^+_{B,\mathbf{I}}$*-set.*

Taking into account Theorems 3.1 and 3.2 from Corollary 4.1 we derive the following result.

Corollary 4.2. *Let* B *is a symmetric basis from the class* $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. *Then*:

1) *not more than countable set* $E \subset \Gamma_2$ *is a* $W_{B,\mathbf{I}}$*-set* ($W^+_{B,\mathbf{I}}$*-set*) *if and only if* E *is symmetric*;

2) *not more than countable set* $E \subset \Gamma_2$ *is a* $R_{B,\mathbf{I}}$*-set* ($R^+_{B,\mathbf{I}}$*-set*) *if and only if* E *is symmetric and of* G_δ *type.*

From Theorem 4.1 we also derive the following result.

Corollary 4.3. *Let* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. *Then there is a non-negative function* $f \in L(\mathbb{R}^2)$ *for which the set*

$$\{\gamma \in \Gamma_2 : \overline{D}_{B(\gamma)}\left(\textstyle\int f, x\right) = \infty \;\; a.e.\}$$

is of the second category and consequently, of the continuum cardinality.

Corollary 4.4. *Let* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. *Then there is a* $W^+_{B,\mathbf{I}}$*-set of the second category and consequently, of the continuum cardinality.*

Let us say that a basis B has *weak Besikovitch property* if for every non-negative function $f \in L(\mathbb{R}^n)$ the set

$$\{x : f(x) < \overline{D}_B(\textstyle\int f, x) < \infty\}$$

is of zero measure. Note that by virtue of the result M. de Guzmán and M. Menárguez (see [5, Ch. IV, §3]) every basis $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}}$ has weak Besikovitch property. Here we note that in [17] it is found more general class of bases $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}$ having weak Besikovitch property.

The next assertion follows from Corollary 4.3.

Corollary 4.5. *Let $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. If, additionally, it is known that B has weak Besikovitch property, then there is a $R^+_{B,\mathbf{I}}$-set of the second category and consequently, of the continuum cardinality.*

Since for any basis $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)}$ each $W_{B,\mathbf{I}}(W^+_{B,\mathbf{I}}, R_{B,\mathbf{I}}, R^+_{B,\mathbf{I}})$-set is W_B (W^+_B, R_B, R^+_B)-set, Corollaries 4.1–4.5 imply corresponding results for W_B (W^+_B, R_B, R^+_B)-sets, in particular, Corollary 4.2 implies the following result.

Corollary 4.6. *Let B is a symmetric basis from the class $\mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$. Then*:

1) *not more than countable set $E \subset \Gamma_2$ is a W_B-set (W^+_B-set) if and only if E is symmetric*;

2) *not more than countable set $E \subset \Gamma_2$ is a R_B-set (R^+_B-set) if and only if E is symmetric and of G_δ type.*

Theorem 4.1 and its corollaries given above for the case $B = \mathbf{I}$ were proved in [14].

In the fifth section we give a complete characterization of W_B-sets and R_B-sets for a quite wide class of bases

G. Karagulyan [6] gave complete characterization of W-sets and R-sets, namely, in [6] it was proved that:

1) *a set $E \subset \Gamma_2$ is W-set if and only if E is symmetric and of $G_{\delta\sigma}$ type.*

2) *a set $E \subset \Gamma_2$ is R-set if and only if E is symmetric and of G_δ type.*

Developing the scheme of proof suggested in [6], below we establish a characterization of W_B-sets and R_B-sets for a quite wide class of bases.

It is true the following theorem.

Theorem 5.1. *If a basis* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ *has non-regular spherical halo function, in particular, if* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ (*see Lemma* 1.4), *then*:

1) *every symmetric set* $E \subset \Gamma_2$ *of* $G_{\delta\sigma}$ *type is* $W_{B,\mathbf{I}}$*-set*;

2) *every symmetric set* $E \subset \Gamma_2$ of G_δ *type is* $R_{B,\mathbf{I}}$*-set.*

The first statement of Theorem 5.1 we derive from the second one on the basis of Theorem 3.3.

Taking into account Theorems 3.1 and 3.2 from Theorem 5.1 we obtain the following result.

Corollary 5.1. *If a symmetric basis* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ *has non-regular spherical halo function, in particular, if* B *is symmetric and* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, *then*:

1) *a set* $E \subset \Gamma_2$ *is* $W_{B,\mathbf{I}}$*-set if and only if* E *is symmetric and of* $G_{\delta\sigma}$ *type*;

2) *a set* $E \subset \Gamma_2$ *is* $R_{B,\mathbf{I}}$*-set if and only if* E *is symmetric and of* G_δ *type.*

Corollary 5.2. *If a symmetric basis* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{TI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$ *has non-regular spherical halo function, in particular, if* B *is symmetric and* $B \in \mathfrak{B}_{\mathbf{I}(\mathbb{R}^2)} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{BF}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{HI}} \cap \mathfrak{B}_{\mathrm{NL}}$, *then*:

1) *a set* $E \subset \Gamma_2$ *is* W_B*-set if and only if* E *is symmetric and of* $G_{\delta\sigma}$ *type*;

2) *a set* $E \subset \Gamma_2$ *is* R_B*-set if and only if* E *is symmetric and of* G_δ *type.*

The function constructed in proof of Theorem 5.1 take values both of positive and negative sign. Therefore the method of proof of Theorem 5.1 does not allow us to characterize W_B^+-sets and R_B^+-sets. Note that the problem of characterizing of W_B^+-sets and R_B^+-sets remains open even for the case $B = \mathbf{I}$.

In the sixth section we construct singular Lebesgue-Stieltjes measures having non-vanishing means almost everywhere.

For a Lebesgue–Stieltjes measure μ and a basis B, the numbers

$$\overline{D}_B(\mu, x) = \varlimsup_{R \in B(x),\, \operatorname{diam} R \to 0} \frac{\mu(R)}{|R|},$$

$$\underline{D}_B(\mu, x) = \varliminf_{R \in B(x),\, \operatorname{diam} R \to 0} \frac{\mu(R)}{|R|}$$

are called the upper and the lower derivative with respect to B, respectively, of μ at a point x. If the upper and the lower derivative coincide, then their common value is called a derivative with respect to B of μ at a point x and denoted by $D_B(\mu, x)$.

A basis B is said to differentiate a Lebesgue–Stieltjes measure μ if $D_B(\mu, x)$ exists for almost all $x \in \mathbb{R}^n$;

A Lebesgue–Stieltjes measure μ is called:

- singular if there is a Borel set E such that: $|E| = 0$ and $\mu(A) = \mu(A \cap E)$ for every Borel set A;
- discrete if it has the form: $\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} m_k \delta_{a_k}$, where $m_k \geq 0$ and δ_{a_k} is the Dirac measure supported at a point a_k.

It is obvious that each discrete Lebesgue–Stieltjes measure is singular.

It is well known that (see e.g. [21, Ch. V, §7]) if μ is a singular Lebesgue–Stieltjes measure μ, then

$$D_{\mathbf{Q}}(\mu, x) = 0 \ \text{ almost everywhere.}$$

Singular Lebesgue–Stieltjes measures lose the "vanishing" property if $\mathbf{Q}$ is replaced by an arbitrary translation invariant basis which does not differentiate $L(\mathbb{R}^n)$. Moreover, it is true the following result.

Theorem 6.1. *For every translation invariant basis B which does not differentiate $L(\mathbb{R}^n)$ there exists a discrete finite Lebesgue–Stieltjes measure μ such that*

$$\overline{D}_B(\mu, x) = \infty \ \textit{ almost everywhere.}$$

For the case $B = \mathbf{I}$, Theorem 6.1 follows from a result of G. Karagulyan [7] about random measures in $\mathbb{R}^n$.

Finally, I would like to express my deep appreciation to my scientific supervisor Professor G. G. Oniani for collaboration during research period and for fruitful considerations.

References

[1] A. Beurling, H. Helson, *Fourier-Stieltjes transforms with bounded powers*, Math. Scand. **1** (1953), 120-126.

[2] O. S. Dragoshanskii, *Convergence of Fourier double series and Fourier integrals of functions on T^2 and $\mathbb{R}^2$ after rotations of coordinates*, Sbornik Math. **191** (2000), 1587-1606.

[3] M. I. Dyachenko, *Rotation of coordinate axes and two-dimensional classes of functions with bounded generalized variation*, Moscow Univ. Math. Bull. **3** (2008), 26-30.

[4] C. Goffman, T. Nishiura, D. Waterman, *Homeomorphisms in Analysis*, Mathematical surveys and monographs Vol. 54, American Mathematical Society, 1991.

[5] M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics, 481. Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[6] G. A. Karagulyan, *A complete characterization of R-sets in the theory of differentiation of integrals*, Studia Math. **181** (1)(2007), 17–32.

[7] G. Karagulyan, *A necessary and sufficient condition for differentiability of integrals of random measures in $\mathbb{R}^n$ over n-dimensional intervals*, Math. Notes **49** (1991), 375-378.

[8] G. L. Lepsveridze, *On strong differentiability of integrals along different directions*, Georgian Math. J. **2** (1995), no. 6, 613–630.

[9] B. López Melero, *A negative result in differentiation theory*, Studia Math. **72** (1982), 173–182.

[10] J. Marstrand, *A counter-example in the theory of strong differentiation*, Bull. London Math. Soc. **9** (1977), 209–211.

[11] A. M. Olevskii, *Modifications of functions and Fourier series*, Uspekhi Mat. Nauk **40** (1985), 157-193 (Russian), translation: Russian Math. Surveys **40**(1985), 181-224.

[12] G. G. Oniani, *Differentiation of Lebesgue integrals*, Tbilisi Univ. Press, Tbilisi, 1998 (in Russian).

[13] G. G. Oniani, *A resonance theorem for a family of translation invariant differentiation bases*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **168** (2015), 99–116.

[14] G. G. Oniani, *On the differentiation of integrals with respect to the bases $B_2(\theta)$*, East J. Approx. **3** (1997), 275–301.

[15] G. G. Oniani, *On the strong differentiation of multiple integrals along different frames*, Georgian Math. J. **12** (2005), no. 2, 349–368.

[16] G. G. Oniani, *On the integrability of strong maximal functions corresponding to different frames*, Georgian Math. J. **6** (1999), no. 2, 149–168.

[17] G. G. Oniani, *On upper and lower derivatives of integrals with respect to convex differentiation bases*, Math. Notes **76** (2004), No.5, 702–714.

[18] A. A. Saakyan, *On Bohr's theorem for multiple Fourier series*, Math. Notes **64** (1998), No. 6, 787-797; translation from Mat. Zametki **64** (1998), No. 6, 913–924.

[19] A. M. Stokolos, *An inequality for equimeasurable rearrangements and its applications in the theory of differentiation of integrals*, Anal. Math. **9** (1983), 133–146.

[20] A. M. Stokolos, *On a problem of A. Zygmund*, Math. Notes **64** (1998), 646–657.

[21] S. Saks, *Theory of the Integral*, 2nd ed., Dover Publications, New York, 1964.

Publications

[I] K. A. Chubinidze, *On sets of singular rotations for translation invariant bases*, Transactions of A. Razmadze Math. Inst. **170** (2016) (to appear).

[II] K. A. Chubinidze, *Rotation of coordinate axes and integrebility of maximal functions*, Book of abstracts of VI international conference of the Georgian Mathematical Union, 99-100.

[III] K. A. Chubinidze and G. G. Oniani, *Rotation of coordinate axes and differentiation of integrals with respect to translation invariant bases*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **167** (2015), 107-112.

[IV] K. A. Chubinidze and G. G. Oniani, *Note on the differentiability of singular Lebesgue-Stieltjes measures*, Georgian Math. J. **22** (2015), 349-354.

[V] K. A. Chubinidze and G. G. Oniani, *Note on singular Lebesgue–Stieltjes measures*, Proc. A. Razmadze Math. Inst. **164** (2014), 98-99.

[VI] G. G. Oniani and K. A. Chubinidze, *Rotation of coordinate axes and differentiation of integrals with respect to translation invariant bases*, Abstracts of the International Conference "Function spaces and function approximation theory" dedicated to 110th anniversary of academician S. M. Nikolskii (May 25–29, 2015, Moscow), pp. 43–46.